Übungsklausur Analysis & Geometrie (Stausee)
Pflichtteil (ohne Hilfsmittel)

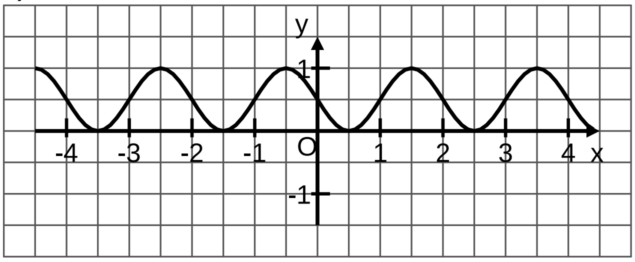
1) Berechne die 1. Ableitung.
a) $f(x)=3x+\sin(1+x^2)$ b) $f(x)=3x\cdot\sin(1+x^2)$ (4VP)

2) Berechne und vereinfache $\int_{-1}^{1}\left(2x^3-\sin(\pi x)\right)dx$. (3VP)

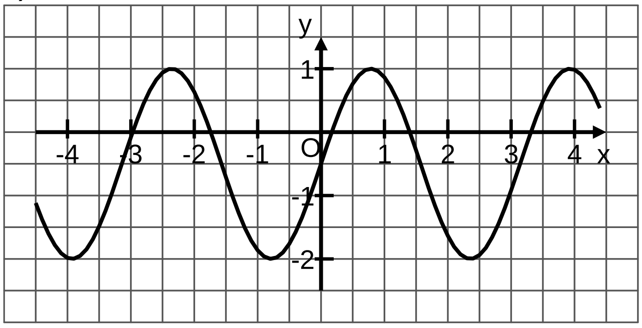
3) Bestimme die Lösungsmenge der Gleichung
$2\left(\cos(x)\right)^2-2\cos(x)=0$ im Bereich $0\le x\le 2\pi$. (3VP)

4) Gib eine Funktionsgleichung an. (4VP)

a)



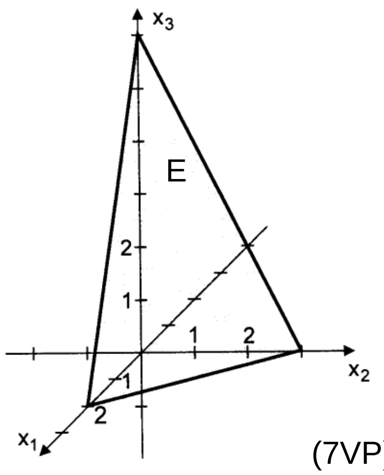
b)



5) Gegeben sind die in der Abbildung dargestellte

Ebene E und die Gerade $g:\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\0\\-11\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}-6\\-4\\-2\end{pmatrix}$.

a) Bestimme eine Koordinatengleichung der Ebene E.
b) Zeige, dass g zu E orthogonal ist.
c) Bestimme die Koordinaten des Schnittpunktes von E und g.
d) Bestimme den Abstand des Ursprungs von der Ebene E.



(7VP)

6) In der Formelsammlung steht: Wenn $f(x)=\frac{g'(x)}{g(x)}$ ist, dann gilt $\int_a^b f(x)dx=\left[\ln\left(\left|g(x)\right|\right)\right]_a^b$.

a) Gegeben sind die Funktionen: $f_1(x)=\frac{2x}{x^2+x};f_2(x)=\frac{1-\cos(x)}{\sin(x)+x}$.

Erfüllen diese beiden Funktionen die Voraussetzung $f(x)=\frac{g'(x)}{g(x)}$?

b) Gib für die Funktion f mit $f(x)=\frac{4x^3}{x^4+1}$ die Funktion g an. Berechne dann $\int_0^1 f(x)dx$. (5VP)

Übungsklausur Analysis & Geometrie (Stausee)
Wahlteil Analysis (mit WTR und Formelsammlung)

Aufgabe 1

Die momentane Änderungsrate des Wasservolumens in einem Stausee wird modellhaft beschrieben durch die Funktion

$f(t) = \left(t^2 - 15t + 44\right) \cdot e^{0,2t} \quad ; 0 \le t \le 12$

(t in Monaten seit Beobachtungsbeginn,
f(t) in 1.000m^3 pro Monat).

a) (1) Skizziere den Graphen von f im angegebenen Intervall.
(2) Berechne, in welchem Zeitraum das Wasservolumen im Stausee abnimmt.

b) Das Wasser im Stausee wird auf Bakterien untersucht.
Dazu wird im Labor in einer Schale mit der Grundfläche von 60cm^2 eine Bakterienkultur angelegt, die anfangs eine Fläche von 1cm^2 überdeckt.
Nach 7 Tagen sind bereits 36cm^2 bedeckt.
Für die Vermehrung der Bakterien wird die Funktion $g(t) = a \cdot e^{k \cdot t}$ angenommen
(t in Tagen, g(t) in cm^2)

(1) Bestimme die Werte für a und k.
(2) Wann ist die ganze Fläche der Schale von den Bakterien überdeckt?
(3) Gib eine Gleichung an, mit der man folgende Fragestellung beschreiben kann:
„In welchem Drei-Tage-Zeitraum nimmt die besiedelte Fläche um 17cm^2 zu?“

Aufgabe 2

Gegeben sind die Funktion $f(x) = \cos(x)$ und die Funktionenschar g_a mit $g_a(x) = a - \sin(x)$.

a) Skizziere die Graphen von f und g_1 in einem gemeinsamen Koordinatensystem für $0 \le x \le \pi$.

b) Bestimme den Parameter a so, dass sich die beiden Graphen berühren. Gib die Koordinaten des Berührpunktes B an.

c) Begründe, dass sich die Graphen von f und von g_a für keinen Wert von a rechtwinklig schneiden.

Übungsklausur Analysis & Geometrie (Stausee)

Lösungen Pflichtteil:

1) a) $f'(x) = 3 + \cos(1+x^2)\cdot 2x$ (2P)

b) $f'(x) = 3\cdot\sin(1+x^2) + 3x\cdot\cos\left(1+x^2\right)\cdot 2x$ (2P) **4P**

2) $\int_{-1}^{1}(2x^3 - \sin(\pi x))dx = \left[\frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{\pi}\cdot\cos\left(\pi x\right)\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\cdot(-1) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}(-1)\right) = 0$ **3P**

3) $2\cdot\cos(x)\cdot\left(\cos(x) - 1\right) = 0$

$\Rightarrow \cos(x) = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{\pi}{2}; x_2 = \frac{3}{2}\pi$ bzw. $\cos(x) - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos(x) = 1 \Rightarrow x_3 = 0; x_4 = 2\pi$ **3P**

4) a) $f(x) = 0{,}5\cdot\sin(\pi(x-1)) + 0{,}5$ (2P) b) $f(x) = 1{,}5\sin(2x) - 0{,}5$ (2P) **4P**

5) a) $E: 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 6$ (1,5P)

b) $\overrightarrow{m_g} = \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}; \overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, es gilt: $-2\cdot\overrightarrow{n_E} = \overrightarrow{m_g} \Rightarrow \overrightarrow{n_E}; \overrightarrow{m_g}$ sind l. a. $\Rightarrow g \perp E$ (1,5P)

c) g in E: $3(1-6t) + 2(-4t) - 11 - 2t = 6 \Leftrightarrow 3 - 18t - 8t - 11 - 2t = 6 \Leftrightarrow -28t = 14$

$t = -\frac{1}{2} \Rightarrow S(4|2|-10)$ (2P)

d) $d(O,E) = \left|\frac{-6}{\sqrt{9+4+1}}\right| = \frac{6}{\sqrt{14}}$ (2P) **7P**

6) a) f_1 erfüllt die Voraussetzung <u>nicht</u>: $g(x) = x^2 + x \Rightarrow g'(x) = 2x + 1 \neq 2x$ (1,5P)

f_2 erfüllt die Voraussetzung <u>nicht</u>: $g(x) = \sin(x) + x \Rightarrow g'(x) = 1 - \cos(x) \neq \cos(x) + 1$ (1,5P)

b) $g(x) = x^4 + 1$ (0,5P)

$\int_0^1 f(x)dx = \left[\ln\left|x^4 + 1\right|\right]_0^1 = \ln(2) - \ln(1) = \ln 2$. (1,5P) **5P**

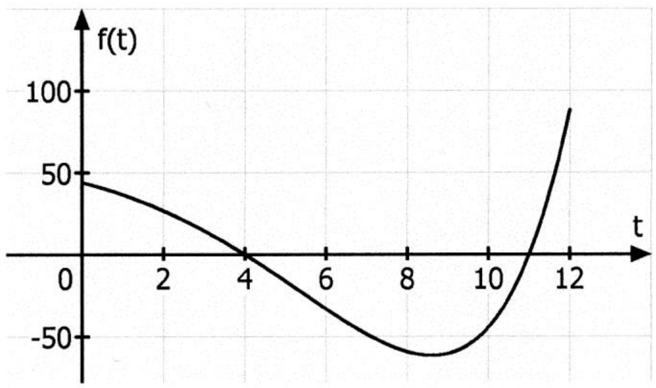
Summe: 26 Punkte

Übungsklausur Analysis & Geometrie (Stausee)

Lösungen Wahlteil Analysis:

Aufgabe 1

a) (1) Skizze siehe rechts



(2) Das Wasservolumen nimmt ab, wenn $f(t) < 0$: $f(t) = 0 \Rightarrow t_1 = 4; t_2 = 11$

$\Rightarrow$ Vom 4. bis zum 11. Monat nimmt das Wasservolumen ab.

b) (1) (I) $1 = a \cdot \underbrace{e^{k\cdot 0}}_{=1} \Leftrightarrow \boxed{a = 1}$ (II) $36 = 1 \cdot e^{k\cdot 7} \Leftrightarrow 7k = \ln(36) \Leftrightarrow k = \frac{\ln(36)}{7} \Leftrightarrow \boxed{k = 0{,}5119}$

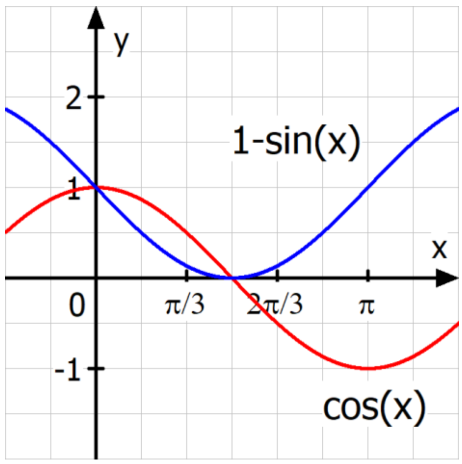
$\Rightarrow g(t) = 1 \cdot e^{0{,}5119t}$ (t in Tagen seit Anlegen der Bakterienkultur)

(2) $60 = e^{0{,}5119t} \Rightarrow t = 7{,}998 \approx 8$ $\Rightarrow$ Nach 8 Tagen wäre die gesamte Schale von den Bakterien bedeckt.

(3) $g(t+3) - g(t) = 17$

Aufgabe 2

a) Skizze siehe rechts



b) (I) $f(x) = g(x) \Leftrightarrow \cos(x) = a - \sin(x)$

(II) $f'(x) = g'(x) \Leftrightarrow -\sin(x) = -\cos(x)$

Gleichung (II) $\sin(x) = \cos(x)$ im Bereich $0 \le x \le \pi$

nur die Lösung $\boxed{x = \frac{\pi}{4}}$ (Anschaulich auch am Einheitskreis)

$y = f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow \boxed{y = 0{,}707} \Rightarrow \boxed{B\left(\frac{\pi}{4} \mid 0{,}707\right)}$

Setze x in (I) ein: $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = a - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0{,}707 = a - 0{,}707$

$\Rightarrow \boxed{a = 1{,}414}$

c) Die Steigungen der beiden Funktionen können Werte zwischen -1 und +1 annehmen (siehe Ableitungen von f und g oben). Die Funktionen könnten sich also nur dann senkrecht schneiden, wenn die Steigung der einen Funktion z. B. -1 ist und die der anderen Funktion +1 (senkrecht schneiden: $m_1 = -\frac{1}{m_2}$). Da aber immer bei den Extremstellen der einen Funktion (Steigung ist 0) die Wendestellen der anderen Funktion (Steigung ist ± 1) liegt und die Funktionen sich durch Veränderung von a nicht in x-Richtung verschieben (sondern nur in y-Richtung) , schneiden sich die Funktionen nie senkrecht.